

Περιεχόμενο μαθήματος

- Αξιοματική Διερεύνηση
 - Ευκλείδει
 - Hilbert.
- Καρτεσιανό Μοντέλο
- Εσωτερικό γινόμενο (γωνίες, Εμβαδά Ελλειδων)
- Εξωτερικό γινόμενο (όγκους)
- Μετασχηματισμοί και Ισομετρίες του Χώρου
- Καμπύλες επιφάνειες
 - Ελλειδο
 - Σφαίρα
 - Καμπύλες 2^{ου} βαθμού
$$ax^2 + 2bxy + c^2y^2 = d$$
- Επιφάνειες 2^{ου} βαθμού στο χώρο.

$$ax^2 + 2bxy + 2cxz + \dots + (*)z^2 = d.$$

§1 Αξιοματική Διερεύνηση

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία
Διερευνάει για τον Ευκλείδη το 300 π.χ.

- Αρχικές Έννοιες
(σημείο, ευθεία, ελλειδο).
- Σύστημα Αξιομάτων
(δοκιμές προτάσεις που θεωρούνται αληθείς).
- Θεωρήματα
προκύπτουν από αλυσισμό αξιωμάτων.
- Ο Ευκλείδης δίνει
 - (1) 23 ορισμούς
 - (2) 5 Αξιώματα
 - (3) 9 κοινές εννοιες.

Ορισμός: ποσάδειται τι είναι σημείο, ευθεία κτλ. όμως δεν αρκούνται παραλληλογράμια κτλ.

Αξιώματα

(για το επίπεδο).

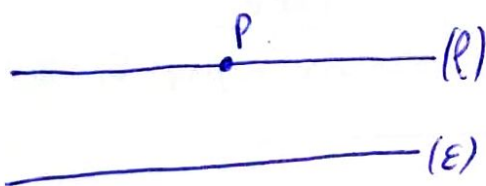
E1: Από 2 σημεία διέρχεται μια και μόνο ευθεία.

E2: Με τυχόν κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.

E3: Κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεχώς και ευθύγραμμως προς τα δύο άκρα της.

E4: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίδες.

E5: Από σημείο P εκτός της ευθείας (E) διέρχεται μια και μόνο παράλληλη ευθεία προς την (E) .



Κανόνες Ένωσες: Έχουν γενικότερη εφαρμογή διότι δεν εφαρμόζονται μόνο στην γεωμετρία.

Για παράδειγμα:

- Όταν δύο μεγέθη είναι ίσα με τρίτο μέγεθος $\Rightarrow$ είναι ίσα μεταξύ τους.

$$\boxed{\begin{matrix} A=B \\ C=B \end{matrix} \Rightarrow C=A}$$

Αρχές του 1900 ο David Hilbert αναθεώρησε το αξιωματικό σύστημα Ευκλείδη.

Κατηγορία I

Αξιώματα θέσεως (5 αξιώματα).

Κατηγορία II

Αξιώματα διατάξεως (4 αξιώματα).

Κατηγορία III

Αξιώματα ισότητας (6 αξιώματα).

Κατηγορία IV

Αξιώματα ανεξαρτησίας
(2 αξιώματα).

Κατηγορία V

Αξιώματα παραλληλότητας
(1-αξίωμα).

Προβληματισμοί:

- Συμβατότητα: Δεν πρέπει να είναι δυνατόν να αποδειχθεί αλήθεια και της άρνησής της.
- Ανεξαρτησία αξιωμάτων: Δεν πρέπει κάποιο αξίωμα να αποδεικνύεται από τα άλλα.
- Πληρότητα: Κάθε αλήθεια ισχυρισμός θα αποδεικνύεται από τα αξιώματα.

§ Στοιχεία από το αξιωματικό σύστημα του Hilbert.

Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός μη-κενού χώρου $E^3 \rightarrow \text{χώρος}$

Το στοιχείο του E^3 λέγεται σημείο. Επιλέγουμε δύο κείθεν Z και P του E^3 .

↓
τα στοιχεία
του Z οφ.
ευθείες.

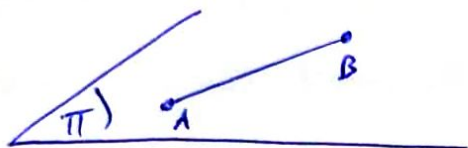
↘ στοιχεία του P
Επίπεδο.

Αυτές οι έννοιες πρέπει να ληφθούν τα αξιώματα

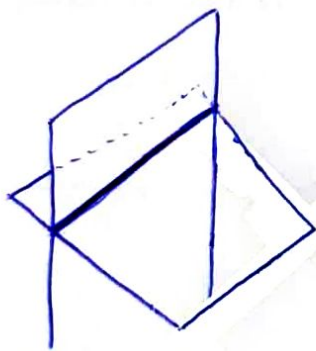
Κατηγορία ②

αξιώματα δέσμευσης:

- ⊛ Αν δύο διοικημένα σημεία $A, B \in E^3$ ανήκουν στο επίπεδο Π τότε και η ευθεία που ενώνει τα A, B περιέχεται στο Π .

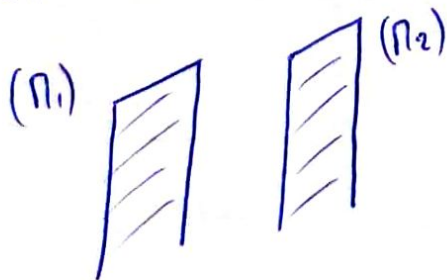


- ⊛ Αν δύο επίπεδα Π_1 και Π_2 έχουν ένα κοινό σημείο A τότε τέμνονται και σε ένα δεύτερο.



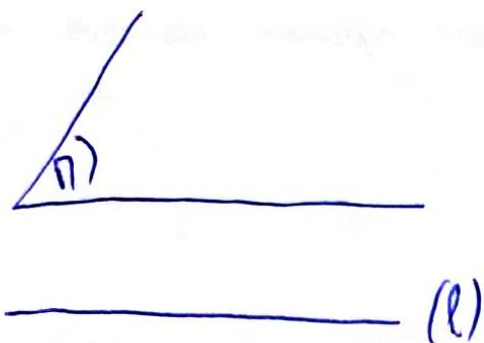
Ορισμός ①

- (1) Δύο επίπεδα Π_1 και Π_2 καλούνται παράλληλα αν έχουν κοινή τμή.



Σε αυτή την περίπτωση
γράφουμε $\Pi_1 // \Pi_2$.

(2) Μια ευθεία (l) ονομάζεται παράλληλη προς το επίπεδο (π) αν l δεν έχει κοινή με το (π) .



(3) Δύο ευθείες (l_1) και (l_2) λέγονται παράλληλες όταν

(i) υπάρχει επίπεδο (π) που περιέχει τις ευθείες.

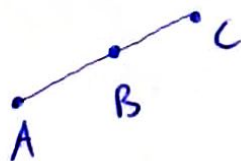
(ii) (l_1) και (l_2) δεν έχουν κοινά στοιχεία.

(4) Δύο ευθείες (l_1) και (l_2) για τις οποίες δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει λέγονται "ασύμμετρες".

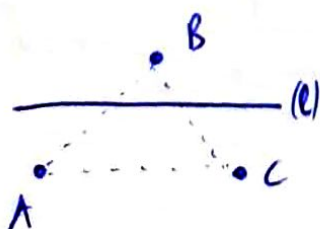
Κατηγορία (II)

Αξιώματα διατάξης:

περιγράφεται τι σημαίνει ένα σημείο B να βρίσκεται ανάμεσα από δύο άλλα σημεία A και C .



(*) Ας υποθέσουμε ότι A, B, C είναι διατεταγμένα σημεία.

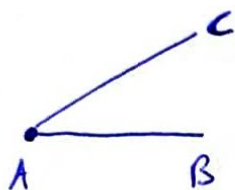


Αν (l) είναι ευθεία η οποία τέμνει μια πλευρά του τριγώνου, αναγκαστικά θα τέμνει και μια δεύτερη.

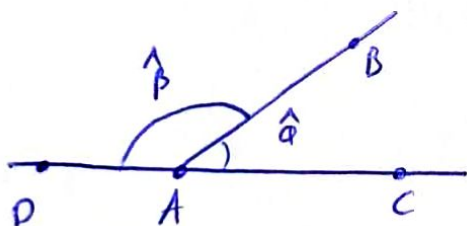
Ορισμός: Αν A, B σημεία του E^3 ως ευθύγραμμο τμήμα AB εννοούμε το σύνολο όλων των σημείων που είναι συνέχεια από τα A και B .



Ορισμός: Ως γωνία ορίζεται η ένωση δύο ημιευθειών AB και AC

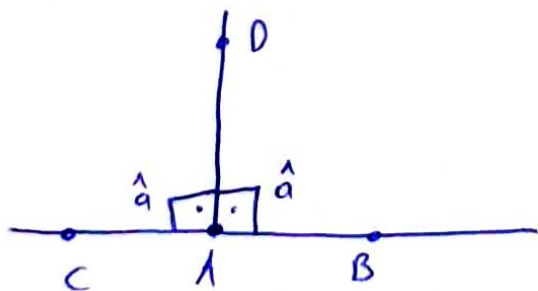


(2) Όταν τα σημεία A, B, C, D είναι στο ίδιο επίπεδο τότε η $\hat{\alpha}$ λέγεται παραπληρωματική με $\hat{\beta}$ και αντιστοίχα.



D, A, C στην ίδια ευθεία

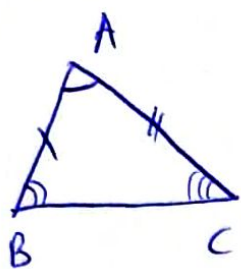
(3) Μια γωνία λέγεται ορθή όταν ισούται με την παραπληρωματική της.



• Αξιώματα ισότητας

Διασωληνει κανονες που πρέπει να πληρεί η ισότητα γεωμ. και τμημάτων.

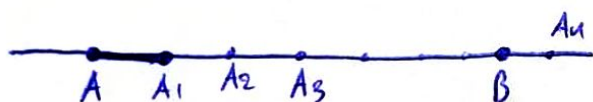
⊕ Έστω ABC και $A'B'C'$ δύο τρίγωνα με



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array}$$

Αξιώματα συνέχειας

Σ1: Έστω σημεία $A \neq B$ σε μια ευθεία και A_1 ανάμεσα από το A, B .



(ίσες αποστάσεις).

Δεσφύμε σημεία $A_2, A_3, \dots$ έτσι ώστε το A_1 να είναι ανάμεσα από το A και το A_2 , το A_2 ανάμεσα από το A_1 και το A_3 κ.ο.κ.

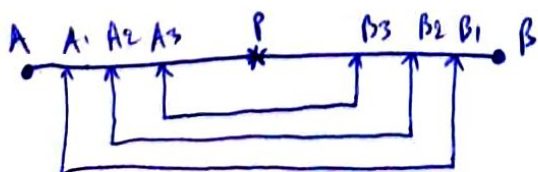
Επιπλέον, δεσφύμε να ισχύει $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_n A_{n+1}$

τότε υπάρχει σημείο A_n αντισ της ακολουθίας ώστε να βρίσκεται ανάμεσα από A και A_n .

Σ2: Έστω τμήμα AB και $\{A_n\}, \{B_n\}$ ακολουθίες εσωτερικών σημείων του AB τ.ω.

(i) $A_n B_n \subset A_{n-1} B_{n-1}$

(ii) δεν υπάρχει ενδογενές τμήμα του οποίου τα άκρα να ανήκουν σε όλα τα A_n, B_n .



Τότε υπάρχει σημείο P σε όλα τα διαστήματα.